OPENINDUSTRIA

CULTURA INDUSTRIALE · STRATEGIA D'IMPRESA

WHITE PAPER · OPENINDUSTRIA TECHLAB

L'ipotesi di Riemann alla prova dell'IA

Risultati verificati, dimostrazioni annunciate
e problemi di validazione (agosto–novembre 2026)

Marco Pugliese

CISINT – Centro Italiano di Strategia e Intelligence

ORCID 0009-0007-7518-4405 · Bolzano, novembre 2026

NOTA DELL'AUTORE

Tre livelli di affidabilità da non confondere

Il contributo ricostruisce, per un pubblico colto ma non specialista, il significato dell'ipotesi di Riemann e lo stato della questione dopo gli annunci del 2026 legati all'intelligenza artificiale. Si distinguono un risultato parziale verificato, un risultato più debole rivendicato e in esame, e due dimostrazioni complete annunciate il 20 novembre e non ancora validate. Il quadro teorico è accompagnato da esperimenti numerici originali; la discussione si concentra su che cosa una verifica formale garantisce e che cosa no, sul rapporto tra certificazione e comprensione e sulle implicazioni pratiche e strategiche, ridimensionando alcune letture diffuse, per esempio sulla crittografia.

Marco Pugliese · CISINT – Centro Italiano di Strategia e Intelligence · ORCID 0009-0007-7518-4405

SINTESI

1. Verificato. Ad agosto 2026 una versione di ricerca di Claude ha portato dal 41,6% al 67,2% la quota minima dimostrata di zeri non banali sulla retta critica.

2. Rivendicato. A ottobre OpenAI ha annunciato la quasi-ipotesi: nessuno zero con parte reale superiore a 7/8. Il risultato è in esame.

3. In verifica. Il 20 novembre sono state annunciate due dimostrazioni complete: una di Levent Alpöge con Claude, scritta in Lean, l'altra interamente umana di Alessandro Masullo.

Abstract. This paper explains the Riemann hypothesis to an educated non-specialist audience and assesses its status after the AI-related announcements of 2026. It separates three levels of reliability: a verified partial result (an unreleased research version of Claude raised the proven proportion of non-trivial zeros on the critical line from 41.6% to 67.2%, August 2026); a weaker claimed result under scrutiny (the quasi-Riemann hypothesis, October 2026); and two complete proofs announced on 20 November 2026 and not yet validated, one obtained with Claude and written in Lean, the other entirely human. Original numerical experiments support the exposition. **Parole chiave:** ipotesi di Riemann, funzione zeta, numeri primi, dimostrazione assistita dall'IA, verifica formale, Lean. **MSC 2020:** 11M26, 11N05, 03B35, 68V15.

01

Introduzione

L'ipotesi di Riemann (RH), formulata nel 1859 [1], è l'unico problema presente sia nella lista di Hilbert del 1900 sia tra i Problemi del Millennio del Clay Mathematics Institute [18]. La sua domanda di fondo è semplice: con quale precisione possiamo prevedere quanti numeri primi ci sono fino a un certo numero? Nel 2026 il problema è diventato anche un banco di prova pubblico per i sistemi di intelligenza artificiale, con una sequenza di annunci rapida e, nella comunicazione corrente, spesso confusa. Lo scopo di questo lavoro è duplice: offrire una spiegazione rigorosa ma accessibile dell'enunciato e della sua portata, e fornire una mappa critica di che cosa è stato effettivamente dimostrato, che cosa è rivendicato e che cosa resta da verificare alla data del 21 novembre 2026.

02

Quadro matematico

Sia π(x) il numero di primi non superiori a x. Fino a 10 ce ne sono 4, fino a 100 sono 25, fino a 1.000 sono 168: i primi si diradano, ma in modo irregolare (dopo 89 il successivo è 97, mentre 101 e 103 sono consecutivi). Il **teorema dei numeri primi**, dimostrato indipendentemente da Hadamard e de la Vallée Poussin nel 1896 [2, 3], afferma che π(x) si stima con x/ln x, cioè che l'errore relativo tende a zero. Un'approssimazione molto migliore è il logaritmo integrale Li(x). Il teorema però non dice di *quanti primi*, in valore assoluto, la stima possa sbagliare: è questa la domanda a cui risponde RH. Riemann studiò la funzione ζ(s), il cui legame con i primi è il prodotto di Eulero, conseguenza dell'unicità della fattorizzazione:

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

Gli **zeri banali** sono −2, −4, −6, …; tutti gli altri, detti non banali, cadono nella striscia critica 0 < Re(s) < 1 e sono simmetrici rispetto alla retta Re(s) = 1/2. **RH afferma che tutti gli zeri non banali hanno parte reale esattamente 1/2** (Figura 1). Il motivo per cui ciò conta è la *formula esplicita*, che esprime la funzione di Chebyshev ψ(x) come una tendenza media più una somma di onde, una per zero:

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log 2\pi - \tfrac{1}{2}\log\left(1 - x^{-2}\right)$$

Ogni zero ρ = β + iγ contribuisce un'oscillazione di ampiezza x^{β}: la coordinata orizzontale degli zeri controlla dunque la grandezza dell'errore. Von Koch [4] dimostrò nel 1901 che RH equivale a un errore dell'ordine di √x · ln x; Schoenfeld [5] ha reso esplicita la costante:

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| < \frac{\sqrt{x}\log x}{8\pi} \qquad (x \geq 2657)$$

Il "mezzo" dell'enunciato diventa così concreto: $x^{1/2}$ è la radice quadrata di x. In una frase, i primi possono addensarsi e diradarsi in modo irregolare, ma RH pone un tetto preciso a quanto queste irregolarità alterano il conteggio complessivo.

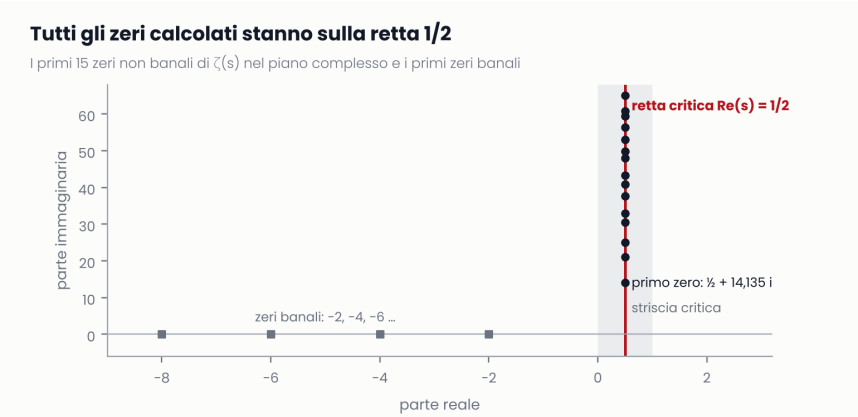


Figura 1 · Calcolo dell'autore: primi 15 zeri non banali di ζ(s) con mpmath.

03

Evidenza numerica

Per rendere tangibili le grandezze in gioco sono stati calcolati $\pi(x)$ fino a 10^6 con un crivello di Eratostene e i primi cento zeri di $\zeta(s)$ con la libreria mpmath. La Tabella 1 mostra il diverso comportamento delle due stime: l'errore di $x/\ln x$ cresce rapidamente, quello di $\mathrm{Li}(x)$ resta piccolo e, da $x \geq 2657$, all'interno della banda di Schoenfeld. La Figura 2 illustra la formula esplicita: con cinque zeri la ricostruzione di $\psi(x)$ ondeggia attorno ai gradini, con cento si sovrappone quasi perfettamente. La Figura 3 estende il confronto fino a un milione. L'evidenza numerica è ovviamente non probatoria: la verifica degli zeri si è spinta oltre 10^{13} casi ed è certificata fino ad altezza $3{\cdot}10^{12}$ [13], ma un insieme infinito non può essere esaurito dal calcolo.

x	π(x)	x / ln x	Li(x)	π − x/ln x	π − Li	√x ln x / 8π
10^3	168	144,8	177,6	+23,2	−9,6	8,7*
10^4	1.229	1.085,7	1.246,1	+143,3	−17,1	36,6
10^5	9.592	8.685,9	9.629,8	+906,1	−37,8	144,9
10^6	78.498	72.382,4	78.627,5	+6.115,6	−129,5	549,7

Tabella 1 · Calcolo dell'autore. *Per x < 2657 il limite di Schoenfeld non è garantito.



Figura 2 · Calcolo dell'autore: formula esplicita con i primi 5 e 100 zeri non banali.

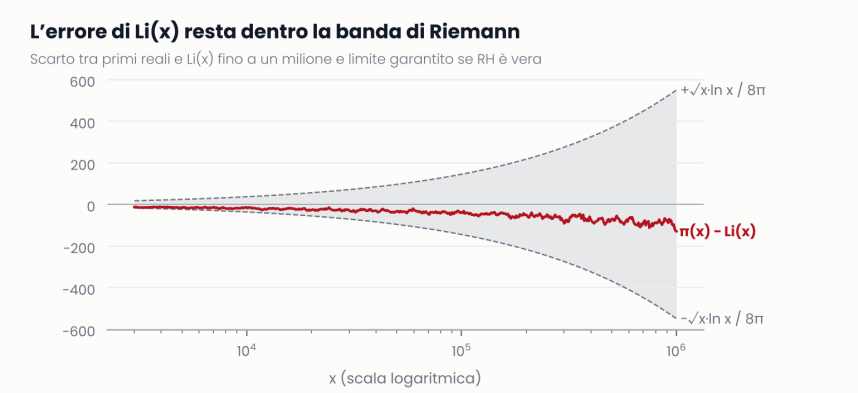


Figura 3 · Calcolo dell'autore fino a 10^6; banda di Schoenfeld valida per $x \geq 2657$ se RH è vera [5].

04

La proporzione di zeri sulla retta critica

In assenza di una dimostrazione, una linea di ricerca centenaria ha cercato di stabilire *quanti* zeri stanno certamente sulla retta. Hardy [6] dimostrò nel 1914 che sono infiniti; Selberg [7] nel 1942 che ne sta una proporzione positiva; Levinson [8] nel 1974 che sono più di un terzo; Conrey [9] nel 1989 più di due quinti; Pratt, Robles, Zaharescu e Zeindler [10] nel 2020 più di cinque dodicesimi (≈ 41,6%). Il 10 agosto 2026 Anthropic ha reso noto che una versione di ricerca non rilasciata di Claude ha portato la soglia al **67,2%**, oltre due terzi [20]. Il risultato non era l'obiettivo: un membro dello staff senza formazione matematica aveva chiesto al modello di tentare RH nel suo complesso. Dopo circa 650 idee infruttuose, in circa un giorno e mezzo il sistema ha coordinato una sessantina di sotto-agenti, migliaia di controlli numerici e una ricerca bibliografica automatizzata, combinando le tecniche di Montgomery, successivi lavori che ne avevano rimosso la dipendenza da RH e un lavoro di Bombieri sul funzionale quadratico di Weil [11, 12]. Il passo chiave, secondo il resoconto, è stato trattare l'intero spazio funzionale congiuntamente ammettendo una forma quadratica non diagonale. Il risultato è stato controllato dai matematici di Anthropic Levent Alpöge e Ralph Furman, esaminato da Brian Conrey e Dan Goldston e formalizzato in Lean [20].

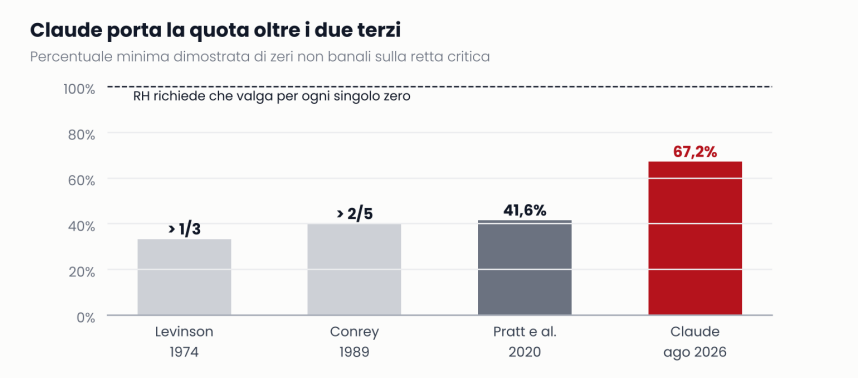


Figura 4 · Fonti: [8, 9, 10, 20]. Levinson e Conrey: soglie di 1/3 e 2/5.

Due precisazioni sono essenziali. Primo, 67,2% non significa che RH sia "vera al 67%": si tratta di un limite inferiore dimostrato su un insieme infinito. Secondo, anche una proporzione del 100% in questo senso asintotico non implicherebbe RH, che riguarda *ogni* singolo zero; la stessa Anthropic ha dichiarato di non aspettarsi che queste tecniche conducano a una dimostrazione completa [20].

05

Regioni libere da zeri e quasi-ipotesi

Un approccio complementare consiste nel dimostrare che in certe regioni della striscia critica non ci sono zeri. Il teorema dei numeri primi richiede solo che non ve ne siano sulla retta Re(s) = 1 e in una sottile regione adiacente, che si restringe al crescere dell'altezza. La cosiddetta **quasi-ipotesi di Riemann** chiede una striscia di larghezza fissa priva di zeri, cioè l'esistenza di un $\sigma_0 < 1$ tale che nessuno zero abbia parte reale maggiore di σ_0; nessun risultato del genere era noto. Il 6 ottobre 2026 OpenAI ha rivendicato, tra 377 risultati, una dimostrazione con $\sigma_0 = 7/8$ per $\zeta(s)$ e per tutte le funzioni L di Dirichlet [25, 26]; secondo le prime valutazioni riportate, gli esperti tendono a ritenere corretta la versione più breve, che però non è stata formalmente verificata [25]. Per simmetria, ciò escluderebbe zeri anche nella fascia Re(s) < 1/8 (Figura 5). È un progresso notevole, ma lascia aperta tutta la regione centrale.

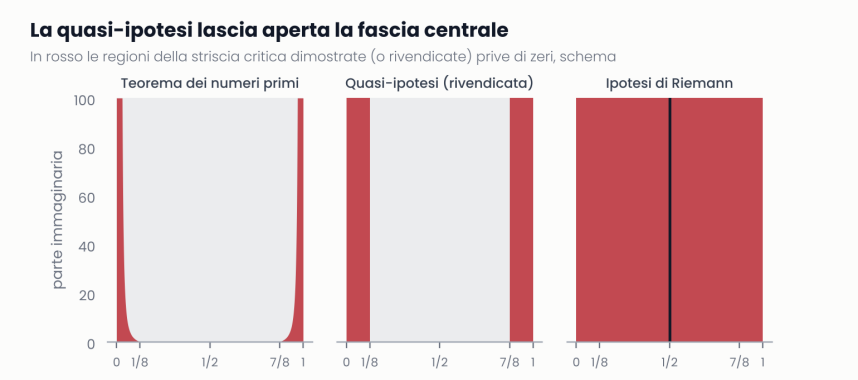


Figura 5 · Schema dell'autore; quasi-ipotesi secondo [25, 26].

06

Gli annunci del 20 novembre 2026

Il 20 novembre Levent Alpöge, teorico dei numeri in forza ad Anthropic, ha pubblicato sul proprio sito una nota di quattro pagine [21] in cui afferma di credere di aver scoperto, lavorando con Claude, una dimostrazione di RH; lo stesso metodo coprirebbe l'ipotesi generalizzata (GRH) per le funzioni L di Dirichlet [22]. L'idea, per come è abbozzata, parte dal metodo di Stepanov, che aveva fornito una prova elementare dell'analogo di RH per le curve sui campi finiti, già dimostrato da Weil [14, 15]: l'ostacolo nel caso degli interi era costruire una funzione ausiliaria con sufficiente molteplicità di annullamento, che sarebbe fornita da lunghe catene di *theta lift*, ciascuna delle quali aggiunge un'unità di molteplicità, con una lunghezza dell'ordine di √X suggerita da Claude [22]. La prova è distribuita come codice Lean in 14 file; una stesura in linguaggio naturale di oltre 250.000 pagine generata automaticamente non è stata pubblicata e una versione leggibile è annunciata per il futuro [22, 23]. La cronologia riportata nella nota copre circa quarantuno giorni, dal 6 ottobre al 16 novembre [22]. Alla data dei primi resoconti, Anthropic, Stanford e il Clay Institute non avevano rilasciato commenti [23].

Poche ore dopo Ravi Vakil, presidente dell'American Mathematical Society, ha diffuso in anticipo la bozza di Alessandro Masullo, postdoc a Stanford, che rivendica GRH (e quindi RH) per una via interamente umana, frutto di circa dodici anni di lavoro ed esaminata privatamente per mesi da Brian Conrad [23, 24]. La comunità matematica si trova così, per la prima volta, davanti a due dimostrazioni indipendenti, una certificabile da una macchina ma non ancora leggibile, l'altra leggibile ma non ancora certificata [27] (Figura 6).



Figura 6 · Fonti: [20, 25, 21, 24].

07

Discussione

Che cosa garantisce una verifica formale. Un assistente di prova come Lean controlla meccanicamente che ogni passaggio segua dai precedenti. Una compilazione corretta non basta però a chiudere la questione: occorre verificare che il teorema finale non dipenda da assiomi aggiuntivi o da passaggi lasciati in sospeso, e che l'enunciato formalizzato coincida con RH così come la intendono i matematici, incluse le definizioni sottostanti della funzione zeta. Un mirror indipendente segnala che il teorema principale usa l'enunciato di RH già presente nella libreria Mathlib [19, 22], il che riduce il secondo rischio; il controllo completo era ancora in corso [22, 23]. Se entrambi i controlli avranno esito positivo, la correttezza logica sarà stabilita con un grado di certezza superiore a quello di molte dimostrazioni tradizionali.

Certificazione e comprensione. Una dimostrazione non è solo un certificato di verità: è anche una spiegazione. Una prova corretta ma illeggibile lascerebbe aperta la domanda sul *perché* RH sia vera e su quali idee nuove la rendano possibile. La coesistenza con la bozza di Masullo rende il caso particolarmente istruttivo: se entrambe reggessero, il confronto tra un argomento umano e uno generato con l'IA diventerebbe un esperimento epistemologico senza precedenti. Va ricordato, infine, che molte dimostrazioni annunciate in passato non hanno superato la verifica, come quella di Michael Atiyah nel 2018 [22], e che il premio Clay richiede pubblicazione e due anni di accettazione generale, per cui non potrebbe essere assegnato prima del 2028 circa [23, 18].

Implicazioni pratiche e strategiche. Contrariamente a una lettura diffusa, una dimostrazione di RH non compromette di per sé la crittografia a chiave pubblica: la sicurezza di RSA dipende dalla difficoltà di fattorizzare grandi interi, e RH non fornisce un algoritmo di fattorizzazione. Le conseguenze sono soprattutto interne alla matematica: numerosi teoremi oggi dimostrati "assumendo GRH" diventerebbero incondizionati. Il test di primalità deterministico di Miller [16] era corretto sotto GRH, ma il test AKS [17] ha poi reso la primalità decidibile in tempo polinomiale senza alcuna ipotesi. Sul piano strategico, la sequenza agosto–ottobre–novembre mostra che i grandi problemi aperti sono diventati anche un terreno di competizione reputazionale tra laboratori di IA; per chi analizza tecnologia e potere, il dato rilevante è la velocità con cui risultati di frontiera vengono prodotti e comunicati, e il conseguente spostamento del collo di bottiglia dalla scoperta alla verifica.

08

Conclusioni

Alla data del 21 novembre 2026 lo stato della questione può essere riassunto in tre livelli. È **dimostrato e verificato** che oltre il 67,2% degli zeri non banali giace sulla retta critica, un progresso di oltre venticinque punti rispetto al record del 2020 ottenuto da un sistema di IA. È **rivendicata e in avanzato esame** una striscia libera da zeri per $\mathrm{Re}(s) > 7/8$. Sono **annunciate e in verifica** due dimostrazioni complete di RH e GRH, una assistita da Claude e formalizzata in Lean, l'altra interamente umana. Per questo è corretto continuare a parlare di *ipotesi*. Qualunque sia l'esito delle verifiche, il 2026 segna il passaggio dell'IA da strumento di calcolo a partecipante attivo nella ricerca matematica di frontiera, e sposta il centro del lavoro scientifico verso la validazione e la comprensione.

Nota metodologica e uso dell'IA. Le informazioni sugli annunci del 2026 provengono da fonti pubbliche consultate il 21 novembre 2026 e riflettono una situazione in rapida evoluzione; le fonti giornalistiche sono indicate come tali. I calcoli (crivello fino a 10^6, zeri di $\zeta(s)$ con mpmath, grafici con matplotlib) sono stati eseguiti dall'autore con il supporto di un assistente di intelligenza artificiale (Claude, Anthropic), utilizzato

anche per la ricerca delle fonti e la stesura preliminare del testo. L'autore ha rivisto i contenuti e ne assume la piena responsabilità; non ha conflitti di interesse da dichiarare.

Fonti

[1] B. Riemann, "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", *Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1859, 671–680.

[2] J. Hadamard, "Sur la distribution des zéros de la fonction ζ(s) et ses conséquences arithmétiques", *Bull. Soc. Math. France* 24 (1896), 199–220.

[3] C.-J. de la Vallée Poussin, "Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers", *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* 20 (1896), 183–256.

[4] H. von Koch, "Sur la distribution des nombres premiers", *Acta Math.* 24 (1901), 159–182.

[5] L. Schoenfeld, "Sharper bounds for the Chebyshev functions θ(x) and ψ(x). II", *Math. Comp.* 30 (1976), 337–360.

[6] G. H. Hardy, "Sur les zéros de la fonction ζ(s) de Riemann", *C. R. Acad. Sci. Paris* 158 (1914), 1012–1014.

[7] A. Selberg, "On the zeros of Riemann's zeta-function", *Skr. Norske Vid.-Akad. Oslo I*, 1942, no. 10.

[8] N. Levinson, "More than one third of zeros of Riemann's zeta-function are on σ = 1/2", *Adv. Math.* 13 (1974), 383–436.

[9] J. B. Conrey, "More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line", *J. Reine Angew. Math.* 399 (1989), 1–26.

[10] K. Pratt, N. Robles, A. Zaharescu, D. Zeindler, "More than five-twelfths of the zeros of ζ are on the critical line", *Res. Math. Sci.* 7 (2020), art. 2.

[11] H. L. Montgomery, "The pair correlation of zeros of the zeta function", in *Analytic Number Theory*, Proc. Sympos. Pure Math. 24, AMS, 1973, 181–193.

[12] E. Bombieri, "Remarks on Weil's quadratic functional in the theory of prime numbers, I", *Rend. Mat. Acc. Lincei* s. 9, 11 (2000), 183–233.

[13] D. J. Platt, T. S. Trudgian, "The Riemann hypothesis is true up to $3 \cdot 10^{12}$", *Bull. London Math. Soc.* 53 (2021), 792–797.

[14] W. M. Schmidt, *Equations over Finite Fields: An Elementary Approach*, Lecture Notes in Math. 536, Springer, 1976.

[15] A. Weil, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Hermann, Paris, 1948.

[16] G. L. Miller, "Riemann's hypothesis and tests for primality", *J. Comput. System Sci.* 13 (1976), 300–317.

[17] M. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena, "PRIMES is in P", *Ann. of Math.* 160 (2004), 781–793.

[18] E. Bombieri, "The Riemann Hypothesis", descrizione ufficiale del problema, Clay Mathematics Institute, 2000; *Rules for the Millennium Prizes*, claymath.org.

[19] The mathlib Community, "The Lean mathematical library", *Proc. CPP 2020*, ACM, 367–381.

[20] Anthropic, "Learning more about Claude's mathematical capabilities", 10 agosto 2026 (rev. 13 agosto 2026), anthropic.com/research/riemann-zeta.

[21] L. Alpöge, "Remark", nota pubblicata sul sito personale dell'autore, 20 novembre 2026, con archivio Lean in 14 file.

[22] Quantum Zeitgeist, "Anthropic Mathematician Claims Proof of the Riemann Hypothesis Built With Claude", 20 novembre 2026.

[23] DataCamp, "Two Proofs of the Riemann Hypothesis Dropped on the Same Day", 20 novembre 2026.

[24] OfficeChai, "Hours After Alpöge's AI-Assisted Riemann Hypothesis Proof, AMS President Ravi Vakil Rushes Out A Rival 'All Human' Proof By Alessandro Masullo", 20 novembre 2026.

[25] Quanta Magazine, "AI Proved the Quasi-Riemann Hypothesis. What Happens Now?", 19 ottobre 2026.

[26] Let's Data Science, "OpenAI Publishes Claimed Quasi-Riemann Result for Scrutiny", ottobre 2026.

[27] Nature, "Mathematicians astounded by AI and human-written proofs of iconic Riemann hypothesis", novembre 2026, doi:10.1038/d41586-026-03812-7.